Μαθημα 25ο 31/5/2016

Αναλυτικη Γεωμετρια

$V(3)$ εχει μια βαση $\vec{x}_1=(1,1,1)$

$V(-3)$ εχει μια βαση $\vec{x}_2=(-1,1,0)$ $\vec{x}_3=(-1,0,1)$

Αλλα βλεπουμε οτι τα $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3$ ειναι Γρ. Ανεξ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{θελουμε ορθογωνια} \rightsquigarrow \text{Gram-Schmidt}$$

$$\text{Προβ}_{\vec{y}}(\vec{x}) = \frac{\langle \vec{x},\vec{y}\rangle}{\langle \vec{y},\vec{y}\rangle}\cdot\vec{y}$$

$\vec{y}_1=\vec{x}_1=(1,1,1)$

$$\vec{y}_2=\vec{x}_2-\text{Προβ}_{\vec{y}_1}(\vec{x}_2)=(-1,1,0)-\frac{\overset{\to 0}{\langle \vec{x}_2,\vec{y}_1\rangle}}{\langle \vec{y}_1,\vec{y}_1\rangle}\cdot\vec{y}_1=(-1,1,0)-0=(-1,1,0)$$

$$\vec{y}_3=\vec{x}_3-\text{Προβ}_{\vec{y}_1}(\vec{x}_3)-\text{Προβ}_{\vec{y}_2}(\vec{x}_3)=(-1,0,1)-\frac{\overset{\to 0}{\langle \vec{x}_3,\vec{y}_1\rangle}}{\langle \vec{y}_1,\vec{y}_1\rangle}\cdot\vec{y}_1-\frac{\langle \vec{x}_3,\vec{y}_2\rangle}{\langle \vec{y}_2,\vec{y}_2\rangle}\cdot\vec{y}_2=$$

$$=(-1,0,1)-0-\frac{1}{2}(-1,1,0)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$$

Τωρα σχηματιζουμε τον πινακα μεταβασης P

$\Rightarrow$ Μια ΟΚΒ του χωρου μας ειναι η

$$\left\{\frac{\vec{y}_1}{|\vec{y}_1|},\frac{\vec{y}_2}{|\vec{y}_2|},\frac{\vec{y}_3}{|\vec{y}_3|}\right\}$$

$\vec{y}_1=(1,1,1)\rightarrow|\vec{y}_1|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

Οποτε $\dfrac{\vec{y}_1}{|\vec{y}_1|}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$\vec{y}_2 = (-1,1,0) \Rightarrow |\vec{y}_2| = \sqrt{(-1)^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$$

Οποτε $\dfrac{\vec{y}_2}{|\vec{y}_2|} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$$\vec{y}_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow |\vec{y}_3| = \sqrt{(-1/2)^2+(-1/2)^2+1^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Οποτε $\dfrac{\vec{y}_3}{|\vec{y}_3|} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{-1}{\sqrt{6}}, \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

Αρα $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ $\left\{ \begin{array}{l} P^t P = I \Leftrightarrow \\ P^{-1} = P^t \end{array} \right\}$

$${}^tPAP = \Delta = \begin{pmatrix} \text{Ιδιοτιμες} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Ορισμος

Εστω k διαστατος Ευκλειδειος χωρος E. Λεμε οτι η απεικονιση $q: E \to \mathbb{R}$ αποτελει τετραγωνικη μορφη, αν υπαρχει συμμετρικος $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) = (a_{ij})$ και μια ΟΚΒ του E:

$q(x) = \sum_{i=1}^{v} a_{ij} x_i^2 + 2 \sum_{1\le i\le j\le v} a_{ij} x_{ij} x_j$ οπου $x_i, \dots, x_v$ οι συντεταγμενες του $\vec{x}$ στην ΟΚΒ του E $\forall \vec{x} \in E$

$\Rightarrow$ η $q(\vec{x})$ παιρνει την εξης μορφη:

$q(\vec{x}) = {}^tXAX$, οπου ${}^tX = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_v \end{pmatrix}$ αλλα αφου A συμμετρικος

$\Rightarrow \exists$ ορθογωνιος P : ${}^tPAP = \Delta \Rightarrow A = P\Delta\,{}^tP$

↳ Διαγωνιος

$q(\vec{x}) = {}^t x A x = {}^t x P \Delta {}^t P x = {}^t x \, {}^t({}^t P) \Delta {}^t P x = {}^t({}^t P x) \Delta ({}^t P x) =$

$= {}^t Z \Delta Z$ με $Z = {}^t P x$

$\Rightarrow$ η $q(\vec{x})$ εχει τη μορφη

$q(\vec{x}) = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2 + \dots + \lambda_\nu (x_\nu')^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^t({}^t P) = P \\ {}^t(A \cdot B) = {}^t B \, {}^t A \end{array} \right\}$$

Ασκηση Α

Να αναχθει η $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $q(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ στους κυριους αξονες της (τους οποιους και να προσδιορισετε).
Στη συνεχεια να σχεδιαστει το γραφημα της επιφανειας $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$ Μπορει να ζητηθει ως μονο η "ξ" ειναι το ιδιο

Λυση

Θεωρω $q(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$

$q(x,y) = (x \ \ y) \, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ οπου $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

Αφου ο Α συμμετρικος $\Rightarrow \exists$ ορθογωνια $P : {}^t P A P = \Delta$
(στηλες του P = κυριοι αξονες)

$P_A = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - (-3)^2 = (5-\lambda-(-3))(5-\lambda+(-3)) =$

$= (8-\lambda)(2-\lambda) = (\lambda-8)(\lambda-2) \Rightarrow \lambda_1 = 2$ (απλες)

$\lambda_2 = 8$

Οι ιδιοχωροι $V(2)$ ειναι η λυση του

$(\Sigma) \left\{ \begin{array}{l} 3x - 3y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = y \xRightarrow{y=x} V(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} =$

$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$ μια βαση του $V(2) = \{(1,1)\} = \vec{x}_1$

$$r(8) = \begin{cases} -3x-3y=0 \\ -3x-3y=0 \end{cases} \Rightarrow x=-y \xRightarrow{y=x} r(8) = \left\{ x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R} \right\}$$

$\Rightarrow$ μια βαση του $r(8) = \{(1,-1)\} = \vec{x}_2$

Τα $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ ειναι ορθογωνια ομως θελουμε και κανονικοτητα (να εχουν δηλ. μετρο 1):

$$\frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|}, \frac{\vec{x}_2}{|\vec{x}_2|} \Rightarrow \vec{\varepsilon}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \quad \vec{\varepsilon}_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

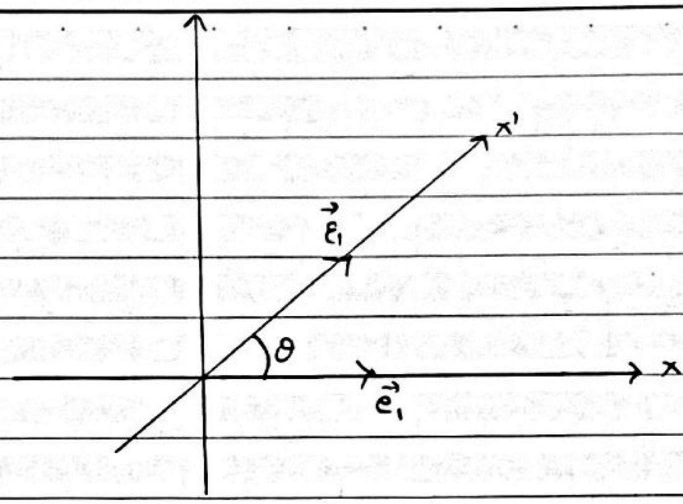
$$\left\{ \begin{array}{l} |\vec{x}_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ |\vec{x}_2| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \end{array} \right\}$$

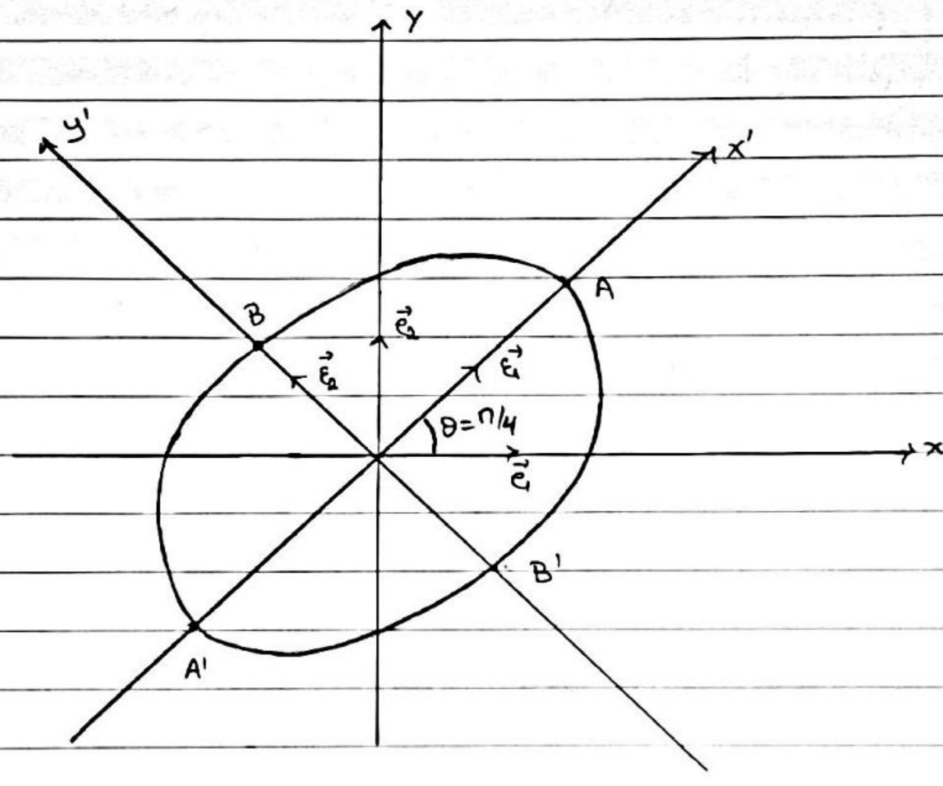
$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} \overbrace{\sqrt{2}/2}^{\vec{\varepsilon}_1} & \overbrace{\sqrt{2}/2}^{\vec{\varepsilon}_2} \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} : {}^tPAP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \to \Delta \text{ (διαγωνιος)}$$

$\Rightarrow q(x,y) = 2(x')^2 + 8(y')^2$ οπου $(\vec{x} = x'\vec{\varepsilon}_1 + y'\vec{\varepsilon}_2)$ και οι χυριοι αξονες αυτης $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2$

Αρα $2(x')^2 + 8(y')^2 = 8 \Rightarrow \frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{1} = 1$ Ελλειψη

$$\cos\theta = \cos(\underbrace{\vec{\varepsilon}_1}_{(\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2)}, \overbrace{\vec{e}_1}^{(1,0)}) = \frac{\langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{\varepsilon}_1| \cdot |\vec{e}_1|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$





$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \ldots$$ και έτσι βρίσκω τα σημεία τομής με τους άξονες

Ασκηση 3

Να σχεδιαστεί το γράφημα της $2x^2+3xy-2y^2=10$

Λυση

Θεωρουμε $q(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ με $q(x,y)=2x^2+3xy-2y^2$

Εχει πινακα $A=\begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & -2 \end{pmatrix}$ για τον οποιο

$q(x,y)=(x \quad y)\,A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ο A συμμετρικος $\Rightarrow \exists$ ορθογ. P:

${}^tPAP=\Delta=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$P_A=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3/2 \\ 3/2 & -2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-4-\frac{9}{4}=\lambda^2-\frac{25}{4}=(\lambda-5/2)(\lambda+5/2)\Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1=5/2$, $\lambda_2=-5/2$ (απλες) $\{$απλες $\Rightarrow$ NO Gram-Schmidt$\}$

Ιδιοχωροι

- $V(5/2)=\begin{cases} -\frac{1}{2}\cdot x+\frac{3}{2}\cdot y=0 \\ \frac{3}{2}\cdot x-\frac{9}{2}\,y=0 \end{cases}\xrightarrow{y=\kappa} x=3y$

Αρα $V(5/2)=\left\{\kappa\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \kappa\in\mathbb{R}\right\}\Rightarrow$ βαση του $V(5/2)=\langle(3,1)\rangle$

- $V(-5/2)=\begin{cases} \frac{9}{2}\cdot x+\frac{3}{2}\cdot y=0 \\ \frac{3}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot y=0 \end{cases}\xrightarrow{x=\kappa} y=-3x$

Αρα $V(-5/2)=\left\{\kappa\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix},\ \kappa\in\mathbb{R}\right\}\Rightarrow$ βαση του $V(-5/2)=\langle(1,-3)\rangle$

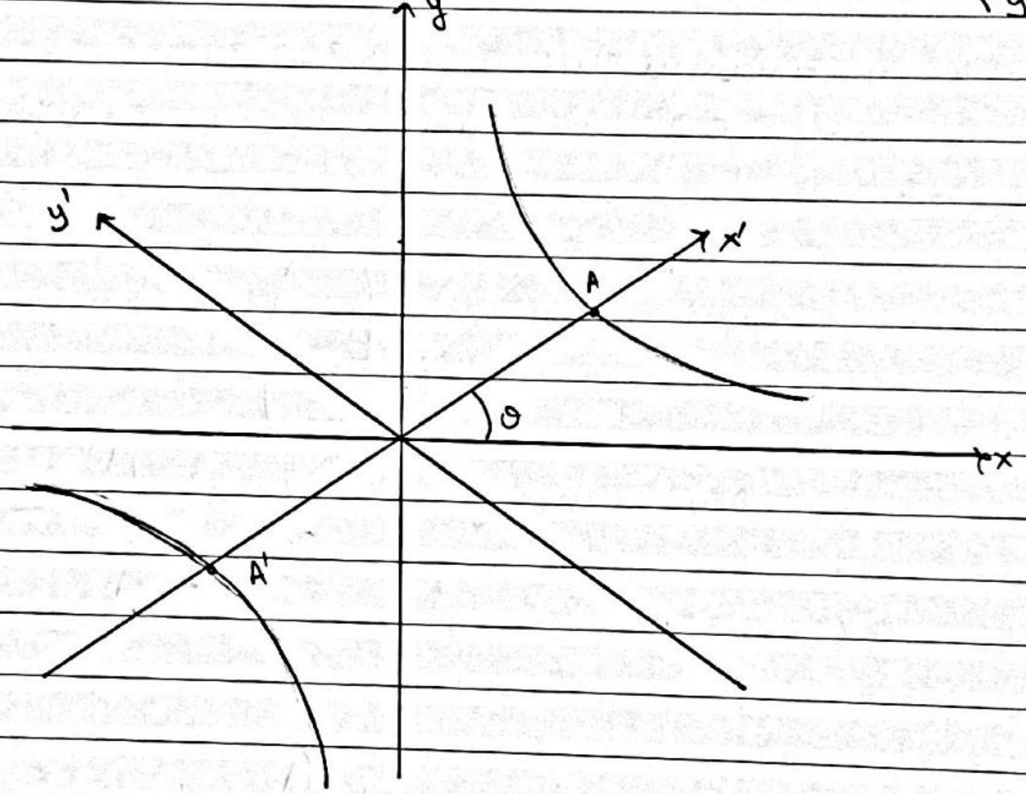
Αρα κανονικοποιω και $\vec{e}_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right)$, $\vec{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}} \right)$

$\left(|(3,1)| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10} \right)$. Αυτοι ειναι οι κυριοι αξονες

$\Rightarrow$ η $q(x,y) = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 = \frac{5}{2}(x')^2 - \frac{5}{2}(y')^2 \ (=10)$

Αρα $\frac{(x')^2}{2^2} - \frac{(y')^2}{2^2} = 1$ και θ: $\cos\theta = \frac{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle}{|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2|} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow$ $\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ και A, A' βρισκονται απο $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$



$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = \varphi$$
$$(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$$

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\varphi > 0$: Ελλειψη
2) $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\varphi > 0$: κυκλος
3) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\varphi = 0$: σημειο $(0,0)$
4) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, $\varphi < 0$: κενο
5) λ_1, λ_2 ετεροσημοι $\begin{cases} \varphi \neq 0 : & \text{Υπερβολη} \\ \varphi = 0 : & \text{Ευθεια} \end{cases}$

Ασκηση Γ

Να αναγνωριστει η επιφανεια (*) $q(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz$, $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, αφου αναχθει στους κυριους αξονες

(*) $q(x,y,z) = 2$ οπου,

Λυση

Παρατηρουμε οτι $q(x,y,z) = (x \;\; y \;\; z)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ οπου

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ Αρα $\exists$ ορθογ. P : ${}^tPAP = \Delta = \begin{pmatrix} \text{ιδιοτιμες} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix}$

Ιδιοτιμες του A

$$P_A = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 1\right] =$$

$$= (2-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) = (2-\lambda)^2(4-\lambda)$$

Αρα $\lambda_1 = 2$ (διπλη) $\lambda_2 = 4$ (απλη)

$$V(2): \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = z \Rightarrow V(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\} \xrightarrow[y=\lambda]{x=k}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} k \\ \lambda \\ k \end{pmatrix}, k, \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, k, \lambda \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V(4): \begin{cases} -x - z = 0 \\ -2y = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$V(4) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \dots = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(*) Παρατηρω οτι ειναι ΗΔΗ τα διανυσματα ορθογωνια δεν χρειαζεται Gram-Schmidt

Κανονικοποιω για τον P

$$(1,0,1) \longrightarrow \frac{(1,0,1)}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \vec{E}_1$$

Αντίστοιχα $(0,1,0)=\vec{\varepsilon}_2$ και $(-1,0,1)\longrightarrow\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\vec{\varepsilon}_3$

$$\Rightarrow P=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2\\ 0 & 1 & 0\\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$$

όπου ${}^tPAP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}\Rightarrow$ άρα $2(x')^2+2(y')^2+4(z')^2=2$

$\Rightarrow \frac{(x')^2}{1^2}+\frac{(y')^2}{1}+\frac{(z')^2}{(1/\sqrt{2})^2}=1$ ελλειψοειδές εκ περιστροφής $\rightarrow a=\theta$

της έλλειψης $\left\{\frac{(x')^2}{1^2}+\frac{(z')^2}{(1/\sqrt{2})^2}=1\ ,y'=0\right\}$ γύρω από τον

άξονα Oz

Τομή με νέους άξονες $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$